Magični kvadrati
©2000 Željko Vrba

Magični kvadrat n-tog reda je kvadratna shema $n \times n$ brojeva od 1 do n^2 u kojoj je zbroj u svakom stupcu, retku i dijagonali jednak i iznosi

$$S_n = \frac{n(1+n^2)}{2}$$

Magični kvadrat 3×3 poznat je već odavno: u drevnoj Kini za njega je (gotovo sigurno) znao i Konfucije u 5. stoljeću prije nove ere (**slika 1**).

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Slika 1 Magični kvadrat 3. reda

Pri sastavljanju kvadrata koriste se dva niza brojeva: prvi niz je 1, 2, 3. . . , n, a drugi je 0, n, $2n$, . . . , $n(n-1)$. Prilikom ove metode treba razlikovati slijedeća četiri slučaja:

- n je neparan i nije djeljiv s 3
- n je neparan i djeljiv je s 3
- n je djeljiv s 4
- n je paran i nije djeljiv s 4

Primjeri će biti pokazani na magičnim kvadratima reda 5, 9, 4 i 6.

Neparni red koji nije djeljiv s 3

Tvorimo dva niza prema gornjim uputama: 1, 2, 3, 4, 5 te 0, 5, 10, 15, 20. Sada tvorimo dva *pomoćna* magična kvadrata petog reda.

3	1	5	2	4
2	4	3	1	5
1	5	2	4	3
4	3	1	5	2
5	2	4	3	1

Prvi pomoćni kvadrat

10	0	5	20	15
5	20	15	10	0
15	10	0	5	20
0	5	20	15	10
20	15	10	0	5

Drugi pomoćni kvadrat

13	1	10	22	19
7	24	18	11	5
16	15	2	9	23
4	8	21	20	12
25	17	14	3	6

Magični kvadrat

Slika 2 Konstrukcija magičnog kvadrata 5. reda

U prvi red prvog kvadrata upišemo prvih pet prirodnih brojeva u bilo kojem poretku. Zatim u drugi red pišemo iste brojeve, ali počinjući s brojem koji se nalazi *iza* srednjeg broja u prvom redu. Isto tako postupimo i za treći, četvrti i peti red. Tako dobijemo magični kvadrat čija je suma $S^{'} = 15$ (vidi **sliku 2**).

Sada se u prvi red drugog kvadrata upišu brojevi iz niza 0, 5, 10, 15, 20 opet u bilo kojem poretku. Kvadrat popunjavamo kao prvi, samo što počinjemo od *srednjeg* elementa (**slika 2**). Tako se dobije drugi pomoćni kvadrat čija je suma $S^{''} = 50$.

U treći kvadrat upisujuemo sumu odgovarajućih polja dva pomoćna kvadrata te dobijemo kvadrat na **slici 2** što je magični kvadrat 5. reda.

Neparan red djeljiv s 3

Da se sastavi magični kvadrat npr. 9. reda, opet se načine dva niza brojeva: **1**, 2, 3, **4**, 5, 6, **7**, 8, 9 za prvi te 0, 9, **18**, 27, 36, **45**, 54, 63, **72** za drugi kvadrat. Pomoću tih nizova opet se izgrade dva pomoćna magična kvadrata istim postupkom kao u prethodnom slučaju, ali se moraju poštivati slijedeća pravila:

1. U prvom nizu se načini zbroj od svakog trećeg broja počevši od prvog (podebljani brojevi) te tako dobiveni zbroj mora iznositi
$$S' = \frac{n(n+1)}{6}$$
Ostali brojevi mogu se razmjestiti po volji. Tako dobijemo niz npr. 1, 9, 4, 6, 5, 2, 8, 7, 3.
2. U drugom nizu se zbraja svaki treći broj počevši od zadnjeg (podebljani brojevi) te taj zbroj mora iznositi
$$S'' = \frac{n^2(n-1)}{6}$$
Ostali brojevi se razmjeste po volji. Tako dobijemo niz npr. 18, 54, 9, 45, 63, 27, 0, 36, 72.

19	63	13	51	68	29	8	43	75
65	35	7	39	73	27	58	15	50
81	22	60	14	47	71	32	3	37
53	70	30	1	45	76	24	59	11
40	78	23	56	17	52	66	28	9
16	48	64	36	4	42	77	20	62
6	41	74	26	61	12	46	72	31
57	10	54	67	33	5	38	80	25
32	2	44	79	21	55	18	49	69

Slika 3 Magični kvadrat 9. reda

S tako dobivenim nizovima postupamo kao u prethodnom slučaju te dobijemo magični kvadrat 9. reda sa **slike 3**.

Red djeljiv s 4

U prvi red prvog kvadrata upišemo brojeve prvog niza, ali tako da zbroj prvog i zadnjeg broja bude jednak zbroju dva slijedeća broja (**slika 4**). U drugi red kvadrata upišemo iste brojeve, ali u obrnutom poretku. Druga polovina kvadrata simetrična je prvoj s obzirom na dužinu koja ih razdvaja.

Brojeve drugog niza sličnim postupkom upisujemo u drugi kvadrat, samo što ih raspoređujemo po stupcima umjesto po retcima (**slika 4**). Zbrajanjem ova dva kvadrata dobijemo magični kvadrat 4. reda (**slika 4**).

2	4	1	3
3	1	4	2
3	1	4	2
2	4	1	3

Prvi pomoćni kvadrat

12	0	0	12
4	8	8	4
8	4	4	8
0	12	12	0

Drugi pomoćni kvadrat

14	4	1	15
7	9	12	6
11	5	8	10
2	16	13	3

Magični kvadrat

Slika 4 Konstrukcija magičnog kvadrata 4. reda

Paran red; nije djeljiv s 4

Najprije sastavimo kvadrat istim postupkom kao da je red djeljiv sa 4. Time dobijemo kvadrat sa **slike 5**). Elemente na dijagonalama treba ostaviti na svojim mjestima. Zatim treba zamijeniti:

1. U prvom retku: drugi element s drugim od kraja, treći s trećim od kraja itd. sve dok ne zamijenimo i srednje elemente. Isti postupak primijenimo i na prvi stupac.
2. Srednje elemente u drugom i zadnjem retku te drugom i zadnjem stupcu. Tako dobijemo kvadrat sa **slike 5**.
3. Rubne elemente u srednjem redu (bilo kojem) i srednjem stupcu (također bilo kojem).

Ovim transformacijama dobijemo magični kvadrat 6. reda (**slika 5**).

29	12	27	28	7	26
2	31	4	3	36	5
17	24	15	16	19	14
23	18	21	22	13	20
32	1	34	33	6	35
11	30	9	10	25	8

Prvi pomoćni kvadrat

29	7	28	27	12	26
32	31	3	4	36	5
23	18	15	16	19	20
17	24	21	22	13	14
2	1	34	33	6	35
11	30	10	9	25	8

Drugi pomoćni kvadrat

29	7	28	9	12	26
32	31	3	4	36	5
23	18	15	16	19	20
14	24	21	22	13	17
2	1	34	33	6	35
11	30	10	27	25	8

Magični kvadrat

Slika 5 Konstrukcija magičnog kvadrata 6. reda