

Neizraziti skupovi i logika  
(v $\beta$ 4)



Ovo je sažetak prvog dijela predmeta (neizrazita logika) “Neizrazito, evolucijsko i neuroračunarstvo” koji je akad. godine 1999./2000. na FER-u predavala prof. Bojana Dalbelo-Bašić. Ovi materijali su temeljeni na njezinim predavanjima i folijama. Materijali kao takvi nisu niti potpuni (obrađen je samo dio gradiva, izostavljeni su neki primjeri), a vjerojatno ima još i pokoja greška. Cilj mi je bio napraviti sažetak koji će više služiti kao referenca (definicije pojmova i osnovna objašnjenja), a ne kao materijal za učenje i polaganje ispita.

1	Neizraziti skupovi i svojstva	2
1.1	Oznake za neizraziti skup	3
1.2	Najčešće korištene funkcije pripadnosti	4
2	Osnovna svojstva neizrazitih skupova	5
2.1	Tipovi neizrazitih skupova	6
3	Operacije nad neizrazitim skupovima	6
3.1	Definicija alternativnih operatora	7
3.2	Svojstva za min-max operacije	7
3.3	Najčešće korišteni operatori	8
4	Neizrazite relacije	8
4.1	Operacije nad neizrazitim relacijama	10
4.2	Svojstva relacija	11
5	Binarne relacije	12
5.1	Separabilnost i neinteraktivnost	13
5.2	Princip proširenja	13
6	Neizrazita aritmetika	13
7	Neizrazita logika i približno zaključivanje	14
7.1	Osnovna pravila zaključivanja u neizrazitoj logici	16
7.2	Lingvističke varijable	16
7.3	Približno zaključivanje	17
7.4	Neizrazite propozicije	17
7.5	Neizrazita produkcijska pravila	18
7.6	Predstavljanje značenja ako-onda pravila	18

“Jedno zrno ne čini gomilu, ni dva, ni tri. . . , s druge strane svi će se složiti da 10 milijuna zrna čini gomilu. Gdje je granica? Možemo li reći da 325647 ne čini gomilu, a 325648 čini?” (Borel, 1950.)

Neizraziti skupovi su jedan od temeljnih alata umjetne inteligencije.<sup>1</sup> Omogućavaju predstavljanje, oblikovanje i rad sa *jezičnim izrazima*, tj. s objektima nejasnih granica (formalizam za baratanje nejasnim, nepreciznim znanjem).

Istraživanje je započeo Lukasiewicz 1920-ih godina gdje je u svojem radu promatrao logike  $L_2 = \{0, 1\}$ <sup>2</sup>,  $L_3 = \{0, 1/2, 1\}, \dots, L_n = \{0, 1/(n-1), \dots, (n-2)/(n-1), 1\}$ . Uveo je i dvije posebne viševrijednosne logike:  $L_\infty$  čije su vrijednosti istinitosti *racionalni* brojevi u intervalu  $[0, 1]$  te  $L_1$  čije su vrijednosti istinitosti *realni* brojevi u intervalu  $[0, 1]$ .<sup>3</sup>

1937. godine je Max Black objavio članak “Vagueness: An Exercise in Logical Analysis”, Philosophy of Science, Vol. 4, 1937. Međutim, članak nije zadobio pažnju znanstvene javnosti.

1965. je Lotfi A. Zadeh objavio članak “Fuzzy Sets”, Information and Control, Vol. 8, No. 4, pp. 338–353, June 1965, i to je postao najcitiraniji članak iz područja fuzzy skupova.

Sam pojam “neizrazita logika” upotrebljava se za dva različita pojma: u užem smislu za sustav za približno zaključivanje, te u širem smislu za teoriju neizrazitih skupova.

## 1 Neizraziti skupovi i svojstva

Razvoj neizrazitih skupova se odvija u dva smjera: matematički konstrukti s kojima se mogu graditi dokazive tvrdnje (neizrazita analiza, neizrazita topologija, itd.) te uvođenje neizrazitosti u logiku, razvoj neizrazite logike, lingvistički pristup te približno zaključivanje<sup>4</sup> (oponašanje ljudskog zaključivanja).

**Definicija 1** Kad god pričamo o skupovima moramo definirati koji je skup vrijednosti smislen za problem. Taj skup vrijednosti čini **univerzalni skup**, i obično se označava sa  $X$ ,  $U$  ili  $\Omega$ . Ovdje će se koristiti oznaka  $X$  za univerzalni skup.

Običan skup<sup>5</sup>  $A \subset X$  možemo definirati na neki od slijedećih načina:

1. Nabranjem elemenata (jedino u slučaju da je kardinalni broj  $|A| < \infty$ ), npr.  $A = \{1, 2, 3\}$ .
2. Navođenjem dobro definiranih svojstava (koja jednoznačno određuju skup), npr.  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ ; ovdje je važno naznačiti da je  $X = \mathbb{R}$ .
3. Pomoću **karakteristične funkcije**:  $\mu_A : X \rightarrow \{0, 1\}$  koja poprima vrijednosti 0 ili 1:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases} \quad (1)$$

Ukoliko  $\{0, 1\}$  zamijenimo *intervalom*  $[0, 1]$  tada pripadnost elementa postaje *stupnjevana*.  $\mu_A$  je **funkcija pripadnosti**<sup>6</sup> koja definira koliko neki element univerzalnog skupa  $X$  pripada skupu  $A$ , odn. kao *stupanj slaganja* s konceptom koji predstavlja neizraziti skup  $A$ .

**Definicija 2** Neizraziti skup je

<sup>1</sup> AI

<sup>2</sup> Ovo je klasična dvovrijednosna logika

<sup>3</sup>  $L_1$  dolazi od oznake  $\aleph_1$  što je oznaka za kardinalnost *neprebrojivih* skupova.

<sup>4</sup> approximate reasoning

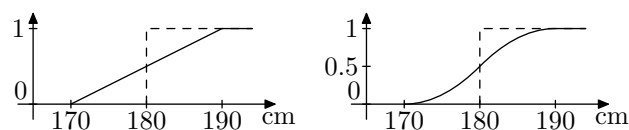
<sup>5</sup> crisp set

<sup>6</sup> membership function

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X, \mu_A(x) \in [0, 1]\} \quad (2)$$

Vidimo da smo klasičan skup zapravo zamijenili *funkcijom* koja predstavlja neizraziti skup. U **tablici 1** su navedene neke funkcije pripadnosti neizrazitog skupa.

**Primjer 1** Neka je skup  $A$  definiran ako skup visokih ljudi. Tada **slika 1** pokazuje dvije moguće funkcije pripadnosti za neizrazite skupove. U oba slučaja je iscrtkano nacrtana funkcija pripadnosti za klasičan skup. Općenito je definiranje funkcije pripadnosti *subjektivno* i *kontekstno* *zavisno*.



**Slika 1** Moguće definicije skupa visokih ljudi

## 1.1 Oznake za neizraziti skup

Klasičan skup  $A$  definira se kao:

$$A = \{x_1, \dots, x_n\}$$

$$A = x_1 + \dots + x_n$$

gdje  $+$  označava *uniju*. Znak  $+$  ima slijedeća svojstva:

$$x_i + x_j = x_j + x_i$$

$$x_i + x_i = x_i \quad (3)$$

$$a/x + b/x = \max(a, b)/x$$

Kod fuzzy skupova za par  $(x, \mu(x))$  uvodimo oznaku  $\mu(x)/x$ . Konkretno, Zadeh je predložio skup

$$A = \{(x; \mu_A(x)) | x \in X, \mu_A(x) \in [0, 1]\}$$

Tako za *prebrojive* skupove imamo

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n = \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i)/x_i \quad (4)$$

a za *neprebrojive*

$$A = \int_X \mu_A(x)/x \quad (5)$$

Ovdje treba naglasiti da se ništa ne integrira, već da integral predstavlja jedino oznaku za neprebrojivost.

**Definicija 3** Za **prazan** skup vrijedi

$$(\forall x \in X) \mu_{\emptyset}(x) = 0 \quad (6)$$

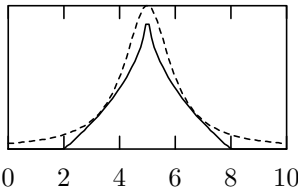
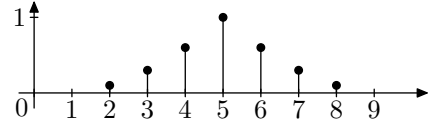
Za **univerzalan** skup vrijedi

$$(\forall x \in X) \mu_X(x) = 1 \quad (7)$$

## Primjer 2

Neka je  $X = N$  te definirajmo skup “brojevi blizu 5”. Tada skup možemo opisati diskretnom funkcijom pripadnosti i formulom:

$$A = 0.1/2 + 0.3/3 + 0.6/4 + 1/5 + 0.6/6 + 0.3/7 + 0.1/8$$



Ako je sada  $X = R$ , možemo definirati različite funkcije pripadnosti (vidi sliku lijevo). Jedna je dana formulom

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{\frac{|x-5|}{3}} & 2 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

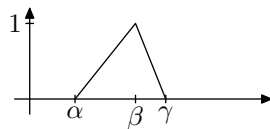
a drugi skup (crtkana funkcija pripadnosti) kao

$$\int_R \frac{1}{1 + (x - 5)^2} dx$$

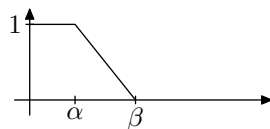
Možemo postaviti pitanje “Koji je pravi opis koncepta “blizu 5”;  $A$  ili  $A'$ ?” Međutim, nisu važne točne numeričke vrijednosti funkcija pripadnosti u određenom kontekstu, već su važni međusobni odnosi funkcija pripadnosti jednih prema drugima.

## 1.2 Najčešće korištene funkcije pripadnosti

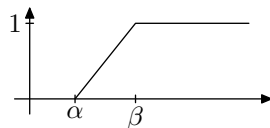
**Tablica 1** prikazuje u praksi najčešće korištene funkcije pripadnosti. Treba napomenuti da osim ovih također postoje i glatke funkcije pripadnosti.



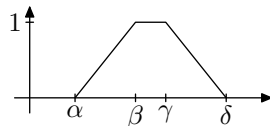
$$\Lambda(x; \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ (x - \alpha)/(\beta - \alpha) & \alpha \leq x \leq \beta \\ (\gamma - x)/(\gamma - \beta) & \beta \leq x \leq \gamma \\ 0 & x > \gamma \end{cases}$$



$$L(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 1 & x < \alpha \\ (\beta - x)/(\beta - \alpha) & \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & x > \beta \end{cases}$$



$$\Gamma(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ (x - \alpha)/(\beta - \alpha) & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & x > \beta \end{cases}$$



$$\Pi(x; \alpha, \beta, \gamma, \delta) = \begin{cases} 0 & x < \alpha \\ (x - \alpha)/(\beta - \alpha) & \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & \beta \leq x \leq \gamma \\ (\delta - x)/(\delta - \gamma) & \gamma \leq x \leq \delta \\ 0 & x > \delta \end{cases}$$

**Tablica 1** Najčešće funkcije pripadnosti

## 2 Osnovna svojstva neizrazitih skupova

**Definicija 4** Visina neizrazitog skupa<sup>7</sup> je maksimalna vrijednost funkcije pripadnosti:

$$\text{hgt}(A) = \max_{x \in X} \mu_A(x) \quad (8)$$

**Definicija 5** Potpora neizrazitog skupa<sup>8</sup> je *običan* podskup univerzalnog skupa  $X$  sa svojstvom  $\mu_A(x) > 0$ , tj:

$$\text{supp}(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\} \quad (9)$$

**Definicija 6** Za zadani  $\alpha \in (0, 1]$  **presjek  $\alpha$  razine**  $A_\alpha$  neizrazitog skupa  $A$  je *običan* podskup od  $X$  definiran kao

$$A_\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha, \forall \alpha \in (0, 1]\} \quad (10)$$

Ukoliko je  $\alpha_2 > \alpha_1$  tada je  $A_{\alpha_2} \subseteq A_{\alpha_1}$ . **Strogi presjek  $\alpha$  razine** imamo ako u definiciji stavimo  $\mu_A(x) > \alpha$ .

Koristeći presjek  $\alpha$  razine, neizraziti skup možemo zapisati kao:

$$\begin{aligned} A &= \int_{[0,1]} \alpha A_\alpha \\ A &= \sum_{\alpha} \alpha A_\alpha \end{aligned} \quad (11)$$

Presjek  $\alpha$  razine često se koristi za proširivanje koncepata sa klasičnih na neizrazite skupove. Funkcija pripadnosti se može izraziti pomoću  $\alpha$  presjeka na slijedeći način:

$$\mu_A(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min(\alpha, \mu_{A_\alpha}(x)) \quad (12)$$

gdje je  $\mu_{A_\alpha}(x)$  funkcija pripadnosti običnog skupa  $A_\alpha$  i poprima vrijednosti 0 ili 1.

**Primjer 3** Nađi sve različite  $\alpha$  presjeke od skupa  $A = 0.1/2 + 0.3/3 + 1/4 + 0.3/5$ , ako je univerzalni skup  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Pokaži kako se može rekonstruirati neizraziti skup  $A$  pomoću njegovih  $\alpha$  presjeka.

Imamo slijedeće  $\alpha$  presjeke prema **definiciji 6**:

$$\begin{aligned} A_{0.1} &= \{2, 3, 4, 5\} \\ A_{0.3} &= \{3, 4, 5\} \\ A_1 &= \{4\} \end{aligned}$$

Skup rekonstruiramo prema **formuli 11** pri čemu koristimo **svojstvo 3**.

**Definicija 7** Skup  $A$  je **normalan** ako je  $\text{hgt}(A) = 1$ .

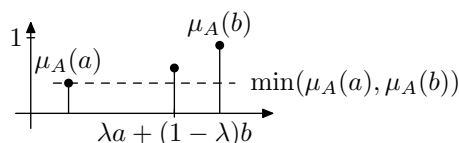
**Definicija 8** **Jezgra**<sup>9</sup> neizrazitog skupa  $A$  je (običan) skup svih elemenata za koje je  $\mu_A(x) = 1$ .

---

<sup>7</sup> height  
<sup>8</sup> support  
<sup>9</sup> core

**Definicija 9** Neizraziti skup  $A \subseteq \mathbb{R}$  je **konveksan** ako  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  i  $\forall \lambda \in [0, 1]$  vrijedi

$$\mu_A(\lambda a + (1 - \lambda)b) \geq \min(\mu_A(a), \mu_A(b)) \quad (13)$$



(vidi sliku desno).

$A$  je konveksan ako i samo ako je  $\forall \alpha \in [0, 1]$   $\alpha$ -presjek zatvoreni interval u  $\mathbb{R}$ . Konveksnost  $A$  ne povlači konveksnost  $\mu_A$ !

**Definicija 10** **Neizraziti broj** je konveksan i normalan neizraziti skup na realnoj osi  $\mathbb{R}$  tako da vrijedi:

1. postoji *jedinstveni*  $x_0 \in X$  tako da vrijedi  $\mu(x_0) = 1$  (*unimodalnost*)
2.  $\mu$  je po dijelovima neprekinuta funkcija

**Definicija 11** Za *konačan* neizraziti skup  $A$  definiramo **kardinalni broj** od  $A$ :

$$|A| = \sum_{x \in X} \mu_A(x) \quad (14)$$

te **relativni kardinalni broj**:

$$\|A\| = \frac{|A|}{|X|} \quad (15)$$

## 2.1 Tipovi neizrazitih skupova

Do sada su razmatrani samo neizraziti skupovi 1. reda. Zadeh je predložio poopćenje pojma neizrazitog skupa na slijedeći način: Neizraziti skup 2. reda je neizraziti skup čije su vrijednosti funkcije pripadnosti neizraziti skupovi 1. reda na  $[0, 1]$ . Mi ćemo u daljnjem tekstu razmatrati isključivo neizrazite skupove 1. reda.

## 3 Operacije nad neizrazitim skupovima

**Definicija 12** Neka su  $A$  i  $B$  neizraziti skupovi nad istim univerzalnim skupom. Tada definiramo **uniju**  $A \cup B$ :

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (16)$$

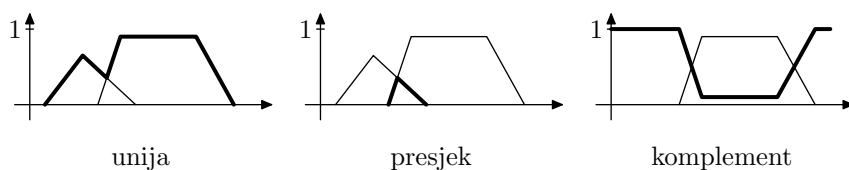
**presjek**  $A \cap B$ :

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) \quad (17)$$

i **komplement**  $A^C$ :

$$\mu_{A^C}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (18)$$

Ovo su standardne operacije koje je definirao Zadeh i za njih kažemo da određuju *min-max* teoriju neizrazitih skupova. **Slika 2** grafički prikazuje definirane operacije.



Slika 2 Operacije nad neizrazitim skupovima (rezultat je podebljan)

**Definicija 13 (inkluzija)** Pišemo  $A \subseteq B$  ako  $\forall x \in X$  vrijedi  $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ . (Stavljamo  $<$  ako nam treba  $A \subset B$ ).

**Definicija 14 (jednakost)** Pišemo  $A = B$  ako vrijedi  $A \subseteq B$  i  $B \subseteq A$ , odn.  $\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in X$ .

### 3.1 Definicija alternativnih operatora

**Definicija 15 Algebarski produkt:**  $\forall x \in X \quad \mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$ .

**Definicija 16 Algebarska suma (vjerojatnosna unija):**  $\forall x \in X \quad \mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x)$ .

**Definicija 17 Ograničena suma:**<sup>10</sup>  $\mu_{A \oplus B}(x) = \min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x))$ .

**Definicija 18 Ograničena razlika:**<sup>11</sup>  $\mu_{A|-|B}(x) = \max(0, \mu_A(x) + \mu_B(x) - 1)$ .

Najopćenitija forma operacije presjeka je **T-norma**, a unije **S-norma**.

**Definicija 19 T norma** označava klasu binarnih operacija  $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  sa svojstvima:

1.  $T(a, b) = T(b, a)$  (komutativnost)
2.  $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$  (asocijativnost)
3.  $a \leq c, b \leq d \Rightarrow T(a, b) \leq T(c, d)$  (monotonost)
4.  $T(a, 1) = a; T(a, 0) = 0$

**Definicija 20 S-norma ili T-konorma** je klasa binarnih operacija  $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  sa istim svojstvima kao 1-3 iz **definicije 19**. Jedino se pravilo 4. mijenja u

1.  $S(a, 1) = 1, S(a, 0) = a$

### 3.2 Svojstva za min-max operacije

Neka su  $A$  i  $B$  neizraziti skupovi. Tada vrijede slijedeće jednakosti:

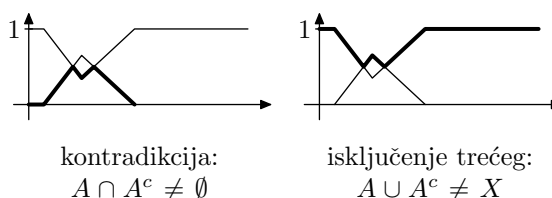
1.  $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$  (komutativnost)
2.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C; (A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$  (asocijativnost)
3.  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  (distributivnost)
4.  $A \cup A = A; A \cap A = A$  (idempotentnost)
5.  $A \cup \emptyset = A; A \cap \emptyset = \emptyset; A \cup X = X; A \cap X = A$  (rubni uvjeti)
6.  $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$  (tranzitivnost)

<sup>10</sup> bounded sum

<sup>11</sup> bounded difference

7.  $(A^C)^C = A$  (involutornost komplementa)  
 8.  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$   $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$  (deMorganove formule)

Bitna svojstva koja vrijede u klasičnoj teoriji skupova, a *ne vrijede* u teoriji neizrazitih skupova su zakon kontradikcije ( $A \cap A^C = \emptyset$ ) te zakon isključenja trećeg ( $A \cup A^C = X$ ) (vidi [sliku 3](#)).



**Slika 3** Klasična svojstva koja ne vrijede kod neizrazitih skupova

### 3.3 Najčešće korišteni operatori

**Tablica 2** prikazuje dualne parove neparametriziranih S i T normi, a **tablica 3** prikazuje dualne parove parametriziranih S i T normi. **Tablica 4** prikazuje parametrizirane operatore komplementa. U svim tablicama  $a$  i  $b$  označavaju vrijednosti funkcija pripadnosti nekog elementa neizrazitim skupovima  $A$  i  $B$ . Bilo koja T norma ograničena je s gornje strane operatorom min, a bilo koja S norma ograničena je s donje strane operatorom max.

Pri biranju operatora trebamo paziti na slijedeće:

- aksiomi koje zadovoljava: izabiremo onaj operator koji ima manje ograničavajuće aksiome, ako je sve ostalo isto
- empirijska provjera: operator mora adekvatno zadovoljavati modele
- prilagodljivost: biramo parametrizirani operator ako je jednim operatorom potrebno modelirati više realnih situacija
- numerička efikasnost (brzina računanja): min i max operatori su numerički najefikasniji

$t_{dr}$	$\begin{cases} \min(a, b) & \max(a, b) = 1 \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$	drastični produkt
$s_{dr}$	$\begin{cases} \max(a, b) & \min(a, b) = 0 \\ 1 & \text{inače} \end{cases}$	drastična suma
$t_E$	$\frac{ab}{2(a + b - ab)}$	Einsteinov produkt
$s_E$	$\frac{a + b}{1 + ab}$	Einsteinova suma
$t_H$	$\frac{a + b - ab}{a + b - 2ab}$	Hamacherov produkt
$s_H$	$\frac{a + b - 2ab}{1 - ab}$	Hamacherova suma

**Tablica 2** Neparametrizirane S i T norme

## 4 Neizrazite relacije

Neizrazita relacija definira stupanj jačine veze među elementima (umjesto 0 i 1) i posebno su važne za ako-onda pravila.

standardni (Zadeh)	$\min(a, b)$	$\max(a, b)$
Hamacher $H_\nu, \nu \geq 0$	$\frac{ab}{\nu + (1 - \nu)(a + b - ab)}$	$\frac{a + b - (2 - \nu)ab}{1 - (1 - \nu)ab}$
Yager $Y_q, q \geq 0$	$1 - \min(1, \sqrt[q]{(1 - a)^q + (1 - b)^q})$	$\min(1, \sqrt[q]{a^q + b^q})$
Frank $F_s, s \geq 0, s \neq 1$	$\log_s \left( 1 + \frac{(s^a - 1)(s^b - 1)}{s - 1} \right)$	$1 - \log_s \left( 1 + \frac{(s^{1-a} - 1)(s^{1-b} - 1)}{s - 1} \right)$
Dubois-Prade, $\alpha \in [0, 1]$	$\frac{ab}{\max(a, b, \alpha)}$	$\frac{a + b - ab - \min(a, b, 1 - \alpha)}{\max(1 - a, 1 - b, \alpha)}$

**Tablica 3** Parametrizirane S i T norme

standardni	$1 - a$
Sugeno	$\frac{1 - a}{1 + \alpha a}$
Yager	$\sqrt[\beta]{1 - a^\beta}$

**Tablica 4** Parametrizirani operatori komplementa

**Definicija 21** Neizrazita relacija  $R$  u  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  je neizraziti skup u  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ , tj:

$$\mu_R : X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow [0, 1]$$

odnosno (za neprebrojive skupove):

$$R = \int_{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n} \mu_R(x_1, \dots, x_n) / (x_1, \dots, x_n) \quad (19)$$

**Primjer 4** Neka je  $U = \{1, 2, 3\}$  te  $V = \{1, 2, 3\}$ . Slijedeća matrica definira relaciju “približno jednako” na  $U \times V$ .

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.3 \\ 0.8 & 1 & 0.8 \\ 0.3 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

**Primjer 5** Želimo usporediti trajanja nekih operacija. Trajanje operacije  $O_i$  poprima vrijednost  $x_i$  iz intervala  $U = [0, 240]$ . Definirajmo neizrazitu relaciju “traje puno duže” na  $U \times U$  funkcijom pripadnosti:

$$\mu_R(x_1, x_2) = \Gamma(x_1 - x_2; 0, 40)$$

$\mu_R(x_1, x_2)$  je broj koji definira u kojoj mjeri operacija  $O_1$  “traje puno duže” od  $O_2$ .

**Definicija 22** Neka je  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$  varijabla koja poprima vrijednosti u  $X_1 \times \dots \times X_n$ . **Neizrazita restrikcija**  $R(\vec{v})$  je neizrazita relacija koja predstavlja *elastično* ograničenje na vrijednosti od  $X$  koje može poprimiti varijabla  $\vec{v}$  u smislu da pridruživanje vrijednosti  $\vec{u}$  varijabli  $\vec{v}$  ima oblik  $\vec{v} = \vec{u} : \mu_R(x)$  gdje je  $\mu_R(\vec{u})$  stupanj kojim je uvjet predstavljen sa  $R$  zadovoljen kad  $\vec{u}$  pridružimo  $\vec{v}$ .

## 4.1 Operacije nad neizrazitim relacijama

**Definicija 23** Neka su  $R$  i  $S$  binarne relacije na  $X \times Y$ . Tada se  $\forall(x, y) \in X \times Y$  definira: presjek:

$$\mu_{R \cap S}(x, y) = \min(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)) \quad (20)$$

i unija:

$$\mu_{R \cup S}(x, y) = \max(\mu_R(x, y), \mu_S(x, y)) \quad (21)$$

(može se upotrijebiti bilo koja T-norma umjesto min, kao i bilo koja S-norma umjesto max).

**Primjer 6** Neka je  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  te  $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ . Tada definiramo relacije  $R$ : “ $x$  je značajno veći od  $y$ ” te  $S$ : “ $x$  je blizu  $y$ ”.

$$R = \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.9 & 0.6 \\ 0.9 & 0.4 & 0.5 & 0.7 \\ 0.3 & 0 & 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Slijedeće dvije matrice prikazuju rezultat  $R \cap S$ ; prva je dobivena operatorom min, a druga je dobivena neparametriziranim Hamcherovim operatorom.

$$R \cap S = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.1 & 0.6 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \quad R \cap S = \begin{pmatrix} 0.36 & 0 & 0.09 & 0.47 \\ 0 & 0.36 & 0 & 0 \\ 0.29 & 0 & 0.57 & 0.4 \end{pmatrix}$$

**Definicija 24** Neka je  $R$  neizrazita relacija na  $X_1 \times \dots \times X_n$  i neka je  $(i_1, \dots, i_k)$  podniz niza  $(1, 2, \dots, n)$ , a  $(j_1, \dots, j_{n-k})$  komplementarni podniz. **Projekcija** neizrazite relacije  $R$  na  $X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k}$  je definirana sa:

$$\text{proj}(R; X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k}) = \int_{X_{i_1} \times \dots \times X_{i_k}} \sup_{j_1, \dots, j_{n-k}} \mu_R(x_1, \dots, x_n) / (x_1, \dots, x_n) \quad (22)$$

(u slučaju konačnih univerzalnih skupova sup se zamijeni sa max, jer je tada to dvoje uvijek jednako).

**Primjer 7** Slijedeća matrica prikazuje originalnu relaciju te projekcije na  $X$  i  $Y$ :

$$\begin{array}{ccccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & \text{proj}[R; X] \\ x_1 & \left( \begin{array}{cccc} 0.8 & 1 & 0.1 & 0.7 \\ 0 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \\ 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{array} \right. & & & & \begin{array}{c} 1 \\ 0.8 \\ 1 \end{array} \\ x_2 & & & & & \\ x_3 & & & & & \\ \text{proj}[R; Y] & & & & & \end{array}$$

**Definicija 25** Ako je  $R$  neizrazita relacija na  $X_{i_1} \times \dots \times X_{i_n}$ , tada je **cilindrično proširenje** na na  $X_1 \times \dots \times X_n$  relacija definirana sa

$$c(R) = \int_{X_{i_1} \times \dots \times X_{i_n}} \mu_R(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) / (x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) \quad (23)$$

**Primjer 8** Neka je  $R = 0.9/y_1 + 1/y_2 + 0.7/y_3 + 0.8/y_4$ . Tada je cilindrično proširenje na  $X \times Y$ :

$$c(R) = \begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0.9 & 1 & 0.7 & 0.8 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**Definicija 26** Ako su  $A$  i  $B$  neizraziti skupovi, tada je  $R = A \times B$  neizrazita relacija definirana sa

$$\mu_R(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad (24)$$

**Primjer 9** Neka je  $X = \{x_1, x_2, x_3\}$  te  $Y = \{y_1, y_2\}$  te neka su  $A = 0.2/x_1 + 0.5/x_2 + 1/x_3$  i  $B = 0.3/y_1 + 0.9/y_2$ . Tada je

$$R = A \times B = \begin{matrix} & y_1 & y_2 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.9 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**Definicija 27** Neka su  $R$  i  $S$  neizrazite relacije na  $X \times Y$ . Onda se kaže da je  $R \subseteq S$  ako je  $\mu_R(x, y) \leq \mu_S(x, y)$ .

## 4.2 Svojstva relacija

Za neizrazite relacije vrijede *sva* svojstva koja su nabrojana za neizrazite skupove.

**Definicija 28** Neka su  $R$  i  $S$  neizrazite binarne relacije na  $X \times Y$  i  $Y \times Z$ . **sup-min kompozicija** relacija je neizraziti skup na  $X \times Z$  sa funkcijom pripadnosti

$$\mu_{R \cdot S}(x, z) = \sup_{y \in Y} \min(\mu_R(x, y), \mu_S(y, z)) \quad (25)$$

odnosno

$$R \cdot S = \text{proj}[c(R) \cap c(S); X \times Z] \quad (26)$$

Ako su  $R$  i  $S$  relacije nad konačnim ili prebrojivim univerzalnim skupovima, tada govorimo o max-min kompoziciji.

Postoje različite definicije kompozicije relacija, ali najčešće su su sup-min i sup-produkt. Opća definicija dana je sa  $\mu_{R \cdot S}(x, z) = \sup_y (\mu_R(x, y) \cdot \mu_S(y, z))$  gdje  $\cdot$  označava bilo koju T-normu.

Ako je  $A$  neizraziti skup, a  $R$  binarna relacija, tada je

$$A \cdot R = \text{proj}[c(A) \cap R; Y] \quad (27)$$

**Definicija 29** Ako stavimo  $B = A \cdot R$  kaže se da je neizraziti skup  $B$  **induciran** od  $A$  preko  $R$ , tj.

$$\mu_B(y) = \sup \min(\mu_A(x), \mu_R(x, y)) \quad (28)$$

To je generalizacija ne-neizrazitog pravila pridruživanja: ako  $x = a$  i  $y = f(x)$ , tada  $y = f(a) = b$ .

## 5 Binarne relacije

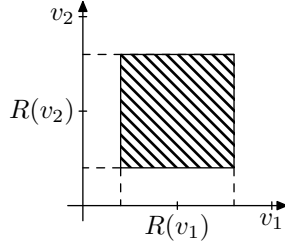
<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="margin-bottom: 10px;">rel. ekvivalencije</div> <div style="margin-bottom: 10px;">rel. neizrazitog uređaja</div> <div style="margin-bottom: 10px;">rel. savršenog neizr. uređaja</div> <div style="margin-bottom: 10px;">potpuna (linearna) uređajna rel.</div> <div style="margin-bottom: 10px;">rel. bliskosti (proximity)<sup>12</sup></div> </div>	<div style="display: flex; flex-direction: column; align-items: center;"> <div style="margin-bottom: 10px;">refl.</div> <div style="margin-bottom: 10px;">tranzit.</div> <div style="margin-bottom: 10px;">antisim.</div> <div style="margin-bottom: 10px;">sav. antisim.</div> <div style="margin-bottom: 10px;">lin.</div> <div style="margin-bottom: 10px;">sim.</div> </div>	<p><b>Definicija 30</b> Neka je <math>R</math> neizrazita relacija na <math>X \times Y</math>. Tada definiramo <b>domenu</b></p> $\text{dom}(R) = \sup_y \mu_R(x, y) \quad \forall x \in X \quad (29)$ <p>i <b>rang</b>:</p> $\text{ran}(R) = \sum_x \mu_R(x, y) \quad \forall y \in Y \quad (30)$ <p><b>Definicija 31 Inverzna relacija</b> <math>R^{-1}</math> je neizrazita relacija na <math>X \times Y</math> definirana sa <math>\mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y)</math>.</p> <p>Ako je binarna relacija <math>R</math> definirana na <math>X \times X</math> tada se kaže da je <math>R</math>:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>refleksivna</b> ako je <math>\mu_R(x, x) = 1</math></li> <li>• <b>slabo refleksivna</b> ako je <math>\mu_R(x, x) \leq \mu_R(x, y)</math></li> <li>• <b>simetrična</b> ako je <math>\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)</math></li> <li>• <b>antisimetrična</b> ako <math>\forall x, y \in X</math> i <math>x \neq y</math> vrijedi ili <math>\mu_R(x, y) \neq \mu_R(y, x)</math> ili <math>\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) = 0</math></li> <li>• <b>savršeno antisimetrična</b> ako <math>\forall x, y \in X</math> vrijedi <math>\mu_R(x, y) &gt; 0 \Rightarrow \mu_R(y, x) = 0</math></li> <li>• <b>R-linearna ili potpuna</b> ako <math>\mu_R(x, y) &gt; 0</math> ili <math>\mu_R(y, x) &gt; 0</math> (ali <i>ne oboje!</i>)</li> <li>• <b>max-min tranzitivna</b> ako je <math>R \cdot R \subseteq R</math>, odnosno <math>\forall (x, y, z) \in X^3</math> vrijedi <math>\mu_R(x, z) \geq \min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z))</math></li> </ul> <p>Neka su <math>R, S, U, T</math> binarne relacije na <math>X \times Y, Y \times Z, Z \times W, Y \times Z</math> redom. Tada vrijede:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>asocijativnost</b>: <math>R \cdot (S \cdot U) = (R \cdot S) \cdot U</math></li> <li>• <b>distributivnost za uniju</b>: <math>R \cdot (S \cup T) = (R \cdot S) \cup (R \cdot T)</math></li> <li>• <b>slaba distributivnost za presjek</b>: <math>R \cdot (S \cap T) \subseteq (R \cdot S) \cap (R \cdot T)</math> (ne vrijedi jednakost!)</li> <li>• <b>monotonost</b>: <math>S \subseteq T \Rightarrow R \cdot S \subseteq R \cdot T</math></li> <li>• <math>R \cdot R^{-1}</math> je slabo refleksivna i antisimetrična na <math>R \times R</math></li> </ul>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

**Tablica 5** Neke posebne relacije

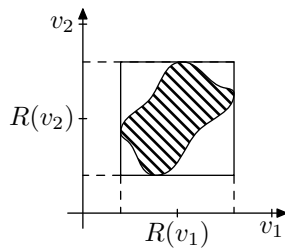
Neke posebne relacije prikazane su [tablici 5](#).

<sup>12</sup> Kad se relacija bliskosti  $n - 1$  puta stavi sama sa sobom u kompoziciju, dobiva se relacija ekvivalencije

## 5.1 Separabilnost i neinteraktivnost



neinteraktivna



interaktivna

**Definicija 32**  $n$ -arna neizrazita restrikcija  $R(v_1, \dots, v_n)$  je **separabilna** ako je  $R(v_1, \dots, v_n) = R(v_1) \times \dots \times R(v_n)$  (gdje je  $R(v_i)$  projekcija  $R$  na  $x_i$ ), odnosno ako je spoj svojih projekcija. Ili:

$$R = \bigcap_{i=1 \dots n} c(\text{proj}[R; X_i]) \quad (31)$$

Varijable  $v_1 \dots v_n$  su **neinteraktivne** ako je njihova neizrazita restrikcija  $R(v_1, \dots, v_n)$  separabilna. Općenito vrijedi da je

$$R(v_1, \dots, v_n) \subseteq R(v_1) \times \dots \times R(v_n) = \bigcap_{i=1 \dots n} c(\text{proj}[R(v_1, \dots, v_n); X_i]) \quad (32)$$

Neinteraktivnost znači nepostojanje bilo kakve funkcionalne veze među varijablama. Interaktivnost je potrebno razmatrati kad se dana funkcija proširuje u smislu principa proširenja.

## 5.2 Princip proširenja

To je temeljni koncept kojim se uvodi neizrazitost u sva područja matematike. Ideja da varijabla poprima neku vrijednost zamjenjuje se idejom da varijabla poprima vrijednost sa određenim stupnjem pripadnosti.

**Definicija 33 Princip proširenja:** Neka je  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ ,  $y = f(x_1, \dots, x_n)$ . Princip proširenja omogućava definiciju neizrazitog skupa  $B$  iz  $n$  neizrazitih skupova  $A_1, \dots, A_n$  izrazom:

$$\mu_B(y) = \sup_{\substack{x_1, \dots, x_n \\ y=f(x_1, \dots, x_n)}} \min(\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)) \quad (33)$$

uz  $\mu_B(y) = 0$  ako je  $f^{-1}(y) = \emptyset$ ;  $\mu_B(y)$  je najveća vrijednost stupnja pripadnosti od svih  $n$ -torki  $x_i$  koje se preslikaju u  $y$ .

Princip proširenja se često koristi u neizrazitoj aritmetici.

## 6 Neizrazita aritmetika

Neizrazita aritmetika je proširenje realne aritmetike i može se definirati na bilo kojem *potpuno uređenom* skupu ( $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}^+$ ...). Neizrazitom broju se pridružuje lingvistički termin: neizrazita aritmetika omogućava "računanje riječima".

**Definicija 34** Označimo sa  $R$  skup svih neizrazitih brojeva nad  $\mathbb{R}$ , sa  $*$  bilo koju binarnu operaciju, te njezino proširenje sa  $|*|$ .  $A|*|B$  definiramo funkcijom pripadnosti

$$\mu_{A|*|B}(z) = \sup_{z=x*y} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)) \quad (34)$$

Ukoliko je  $\phi$  unarna operacija, tada princip proširenja daje

$$\mu_{\phi(a)}(z) = \sup_{z=\phi(x)} \mu_A(x) \quad (35)$$

Neizrazita aritmetika se može promatrati i kao proširenje *intervalne aritmetike*: računa se sa intervalima na svim nivoima pouzdanosti  $\alpha$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ . Povećanjem  $\alpha$  interval pouzdanosti se ne povećava. Neka je  $A$  neizraziti broj, te  $A_\alpha$   $\alpha$ -presjek od  $A$  (zatvoreni interval u  $\mathbb{R}$ ). Tada vrijedi:

$$A = \sum \alpha A_\alpha = \sum \alpha [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] \quad (36)$$

pa se zbroj neizrazitih brojeva, slijedeći pravila intervalne aritmetike može definirati kao<sup>13</sup>

$$A| + |B = \sum \alpha [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}] \quad (37)$$

Ta je definicija identična definiciji pomoću principa proširenja (također vrijedi i za ostale operacije).

**Primjer 10** Za primjenu su važni trokutasti i trapezoidni brojevi ( $\Lambda$  i  $\Pi$  funkcije). Neka su  $A$  i  $B$  neizraziti brojevi definirani  $\Lambda$  funkcijama:

$$\mu_A(x) = \Lambda(x; -5, 2, 1) = \begin{cases} 0 & x \leq -5 \\ x/3 + 5/3 & -5 < x \leq -2 \\ -x/3 + 1/3 & -2 < x \leq 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

te

$$\mu_B(x) = \Lambda(x; -3, 4, 12) = \begin{cases} 0 & x \leq -3 \\ x/7 + 3/7 & -3 < x \leq 4 \\ -x/8 + 3/7 & 4 < x \leq 12 \\ 0 & x > 12 \end{cases}$$

Zatim imamo:  $\alpha = a_1^{(\alpha)}/3 + 5/3$  iz čega slijedi  $a_1^{(\alpha)} = 3\alpha - 5$ , te također  $\alpha = -a_2^{(\alpha)}/3 + 1/3$  iz čega dobivamo  $a_2^{(\alpha)} = -3\alpha + 1$ . Tako dobivamo i drugu od ovih jednakosti:

$$[a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [3\alpha - 5, -3\alpha + 1]$$

$$[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [7\alpha - 3, -8\alpha + 12]$$

Sada računamo  $A_\alpha + B_\alpha = [10\alpha - 8, -11\alpha + 13]$  te obrnutim postupkom dobivamo da se radi o trokutastom broju:

$$\mu_{A|+|B}(x) = \Lambda(x; -8, 2, 13) = \begin{cases} 0 & x \leq -8 \\ x/10 + 8/10 & -8 < x \leq 2 \\ -x/11 + 13/11 & 2 < x \leq 13 \\ 0 & x > 13 \end{cases}$$

Trokutasti brojevi su zatvoreni s obzirom na zbrajanje i oduzimanje (zbroj i razlika dva trokutasta broja ostaje trokutasti broj).

## 7 Neizrazita logika i približno zaključivanje

Klasična logika zna samo za dvije vrijednosti istinitosti: laž (0) i istina (1). Ljudsko znanje je oblikovano nepotpuno, nejasno, izraženo govornim jezikom i oblikovano atributima stepenaste prirode.

<sup>13</sup> U intervalnoj aritmetici vrijedi  $[x, y] + [a, b] = [x + a, y + b]$

Lukasiewicz je uveo viševrijednosnu logiku sa stupnjevima istinitosti

$$T_n = \left\{0, \frac{1}{n-1}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\}$$

i logičke operatore

$$\begin{aligned}\neg p &= 1 - p \\ p \vee q &= \max(p, q) \\ p \wedge q &= \min(p, q) \\ p \rightarrow q &= \min(1, 1 + q - p) \\ p \Leftrightarrow q &= 1 - |p - q|\end{aligned}$$

Takvi se logički sustavi za  $n \geq 2$  označavaju sa  $L_n$ .  $L_2$  je klasična Booleova logika,  $L_\infty$  je logika čije su vrijednosti istinitosti  $[0, 1] \in Q$ , a  $L_1$  čini standardnu Lukasiewiczzevu logiku  $[0, 1] \in R$  (izomorfnu teoriji neizrazitih skupova kao što je  $L_2$  izomorfna klasičnoj teoriji skupova).

Stupanj pripadnosti  $\mu_A(x)$  za  $x \in X$  neizrazitog skupa  $A$  može se interpretirati kao stupanj pripadnosti propozicije “ $x$  je element  $A$ ” u  $L_1$ . I obrnuto, stupanj istinitosti propozicije “ $x \in P$ ” gdje je  $P$  neizraziti predikat (visok, mlad, skup, vruć... ) može se interpretirati kao stupanj pripadnosti  $\mu_P(x)$  u neizrazitom skupu koji opisuje svojstvo  $P$ .

**Neizrazita logika**<sup>14</sup> je proširenje viševrijednosne logike u kojoj su vrijednosti istinitosti jezične varijable. **Približno zaključivanje**<sup>15</sup> nije isto što i točno viševrijednosno zaključivanje. Približno zaključivanje je izvođenje moguće nepreciznih zaključaka iz skupa nepreciznih premisa (oponašanje ljudskog uma).

**Dispozicije** su propozicije (pretežno istinite) kvantificirane sa riječi “obično” (implicitna). Općepoznate činjenice<sup>16</sup> čine skup dispozicija. Neizrazita logika (dispozicijska logika) su pravila zaključivanja iz općepoznatih činjenica. Temeljne osobine neizrazite logike:

- Poprimanje vrijednosti iz  $[0, 1]$ , ali iz *podskupova*. (Npr. “vrlo istinit” je podskup intervala  $[0, 1]$ ).
- Predikati u klasičnoj logici su “čvrsti” (ograničeni na klasične podskupove). U neizrazitoj logici predikati mogu biti i neizraziti, npr. “bolestan”, “umoran” itd.
- Viševrijednosne logike imaju samo dva **kvantifikatora**: svi ili neki. Kvantifikatori u neizrazitoj logici: “malo”, “pokoji”, “uglavnom”, “puno”, “često”, “povremeno” (neizraziti brojevi).
- Neizrazita logika ima metodu za predstavljanje značenja klasičnih i neizrazitih *modifikatora predikata* (“ne”, “vrlo”, “krajnje”, “malo”, “manje”, “više”...) što vodi na **lingvističke varijable** (vrijednosti riječi iz govornog ili umjetnog jezika).
- U klasičnoj logici propozicija kvalificiranje  $p$ : “istina”, “laž” ili “moguće” ili “izvjesno”. Neizrazita logika ima tri osnovna oblika **kvalificiranja propozicija**:
  - kvalificiranje *istinitosti* (skoro istinito, ne baš istinito)
  - *vjerojatnosna* kvalifikacija (malo vjerojatno, vrlo vjerojatno)
  - *mogućnosna* kvalifikacija (skoro nemoguće, vrlo izvjesno)

<sup>14</sup> fuzzy logic

<sup>15</sup> approximate reasoning

<sup>16</sup> common-sense knowledge

## 7.1 Osnovna pravila zaključivanja u neizrazitoj logici

Premise i zaključak su u kanonskoj formi: propozicija postavlja ograničenje na vrijednosti varijable, a zaključak je novo ograničenje izvedeno u postupku zaključivanja<sup>17</sup>. **Kategorička pravila** su bez kvantifikatora. Općenitiju klasu čine dispozicijska pravila.

- **Princip nasljeđivanja:**<sup>18</sup>  $X$  je  $A$ ;  $A \subset B \Rightarrow X$  je  $B$ . Princip nasljeđivanja može se shvatiti kao generalizacija ne izrazite skupove principa nasljeđivanja koji se vrlo često koristi u predstavljanju znanja.
- **Pravilo konjunkcije:**  $X$  je  $A$ ;  $X$  je  $B \Rightarrow X$  je  $A \cap B$ , gdje je  $\mu_{A \cap B} = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$ ,  $x \in U$
- **Pravilo kartezijevog produkta:**  $X$  je  $A$ ;  $Y$  je  $B \Rightarrow (X, Y)$  je  $A \times B$  gdje je  $\mu_{A \times B} = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$ .
- **Pravilo projekcije:**  $(X, Y)$  je  $R \Rightarrow X$  je  $\text{proj}[R; X]$  gdje je  $\mu_{\text{proj}[R; X]} = \sup_y (\mu_R(x, y))$
- **Pravilo kompozicije:**  $X$  je  $A$ ;  $(X, Y)$  je  $R \Rightarrow Y$  je  $A \cdot R$  gdje je  $A \cdot R$  definirano kao kompozicija unarne relacije  $A$  sa binarnom  $R$ .
- **Generalizirani modus ponens:**  $X$  je  $A$ ;  $Y$  je  $C$  ako  $X$  je  $B \Rightarrow Y$  je  $A \cdot (\neg B \oplus C)$  gdje je  $\neg B$  negacija od  $B$ , a  $\oplus$  ograničena suma definirana sa  $\mu_{B \oplus C}(x, y) = \min(1, 1 - \mu_B(x) + \mu_C(y))$ . Važno svojstvo generaliziranog modus ponensa koje ne posjeduje klasični modus ponens je da antecedent “ $X$  je  $B$ ” ne mora biti identičan premisi “ $X$  je  $A$ ”. Generalizirani modus ponens može se smatrati slučajem pravila kompozicije.

## 7.2 Lingvističke varijable

Osnovni pojam u približnom zaključivanju je *lingvistička varijabla* (vrijednost riječi ili rečenice iz prirodnog ili umjetnog jezika) (Zadeh). Uvođenje lingvističke varijable omogućava približan (ali sustavan) opis i analizu sistema koji su nejasni ili prekompleksni da bi se na njih primijenile konvencionalne matematičke metode.

**Definicija 35** **Lingvistička varijabla** je petorka  $(x, Tx, U, G, M_x)$  gdje je

- $x$  naziv lingvističke varijable
- $Tx$  skup lingvističkih vrijednosti (termina, izraza) koje može poprimiti lingvistička varijabla  $x$ <sup>19</sup>
- $U$  je stvarna fizička domena u kojoj elementi iz  $T$  poprimaju numeričke vrijednosti (kontinuiran ili diskretan)<sup>20</sup>
- $G$  je skup sintaktičkih pravila koji generiraju skup  $T$  iz skupa osnovnih termina
- $M_x$  je semantička funkcija koja daje (kvantitativno) značenje (interpretaciju) lingvističkim izrazima.  $M_x$  je funkcija koja  $\forall x \in T$  pridružuje neizraziti podskup od  $U$ .

**Primjer 11** Tako na primjer definiramo lingvističku varijablu STAROSNA DOB uz vrijednosti VRLO MLAD, MLAD, STAR itd.

**Osnovna varijabla**<sup>21</sup> je numerička varijabla koja poprima vrijednosti u  $U$ .

<sup>17</sup> constraint propagation

<sup>18</sup> entailment

<sup>19</sup> term set

<sup>20</sup> universe of discourse

<sup>21</sup> base variable

**Lingvistička vrijednost** može biti interpretirana kao **labela neizrazite restrikcije** na vrijednosti osnovne varijable. (Npr. neizrazita restrikcija definira značenja topao ili mlad za varijable starosna dob i temperatura). Značenje te restrikcije definirano je sa  $\mu$ .

**Sintaktičko pravilo** vezano za lingvističku varijablu određuje na koji se način generiraju vrijednosti iz skupa izraza  $T$  (obično se pretpostavlja da su to pravila kontekstno slobodne gramatike).

**Semantičko pravilo** određuje na koji se način generira značenje složenih izraza koji uključuju *i*, *ili*, *ne* te lingvističke modifikatore (npr. ne vrlo mlad i ne vrlo star).

Značenja osnovnih izraza (npr. mlad i star) su subjektivna i kontekstno zavisna i ta su značenja određena a priori.

**Lingvistički modifikator**<sup>22</sup> je operacija koja modificira značenje izraza (termina, elementa  $T$ ), odnosno pripanog neizrazitog skupa. Ako je  $A$  neizraziti skup, a  $m$  modifikator, tada  $m$  generira novi neizraziti skup  $m(A)$ .

**Primjer 12** Najčešći matematički modeli modifikatora su

- koncentracija:  $\mu_{\text{con}(A)}(x) = (\mu_A(x))^2$
- dilatacija (difuzija):  $\mu_{\text{dil}(A)}(x) = (\mu_A(x))^{1/2}$
- kontrastna intenzifikacija:

$$\mu_{\text{int}(A)}(x) = \begin{cases} 2(\mu_A(x))^2 & \mu_A(x) \in [0, 0.5] \\ 1 - 2(1 - \mu_A(x))^2 & \text{inače} \end{cases}$$

Sljedeći lingvistički modifikatori su povezani sa gore spomenutim matematičkim operatorima: “vrlo(A)”=con(A); “manje ili više(A)”=dil(A); “više(A)”= $A^{1.25}$ ; “manje(A)”= $A^{0.75}$ ; “neznatno(A)”=int[više(A) & ne(vrlo(A))].

**Lingvistička aproksimacija** je nalaženje lingvističkog izraza čije je značenje (funkcija pripadnosti) jednako ili najbliže moguće značenju (ili funkciji pripadnosti) složenog izraza. Koncept lingvističke varijable ulazi u približno zaključivanje kao rezultat oblikovanja **istine** kao lingvističke varijable.

### 7.3 Približno zaključivanje

Osnovna razlika od viševrijednosne logike:

- Zaključak u približnom zaključivanju zavisi od *značenja* koje je pridruženo neizrazitim propozicijama.
- Približno zaključivanje je računanje s neizrazitim skupovima koji predstavljaju značenja neizrazitih propozicija.
- Približno zaključivanje služi za predstavljanje znanja i zaključivanje kada je znanje izraženo prirodnim jezikom.

### 7.4 Neizrazite propozicije

**Atomske propozicije** su oblika “Pogreška je negativna-velika”: ima *fizičku varijablu* “pogreška” te određenu *vrijednost* “negativna-velika” varijable pogreška. Simbolički zapisujemo “E je NB”. Općenito, “X je A” je zapis *neizrazite atomske propozicije*.

<sup>22</sup> linguistic hedge, modifier

Značenje propozicije “E je NB” definirano je neizrazitim skupom NB, tj. njegovom funkcijom pripadnosti  $\mu_{NB}$  definiranoj na  $[-6, 6]$ .  $\mu_{NB}$  definira u kojoj mjeri određena kvantitativna vrijednost (obične) numeričke varijable “pogreška” pripada skupu “negativna velika pogreška”. Određena numerička vrijednost pridružuje se varijabli  $E$ .<sup>23</sup>

**Primjer 13** Neka je  $VA(E) = -3.2$ . Ako je  $\mu_{NB}(-3.2) = 0.7$ , onda je 0.7 stupanj valjanosti propozicije “E je NB”.

## 7.5 Neizrazita produkcijska pravila

Ako-onda neizrazita pravila opisuju uzročno posljedičnu vezu između varijabli (npr. stanja procesa i upravljačkih varijabli) i oblika su: “AKO (neizrazita propozicija1) ONDA (neizrazita propozicija2)”. Objе neizrazite propozicije mogu biti atomske ili složene.

**Primjer 14** Neka je dana jezična varijabla  $X$  na univerzalnom skupu  $U$  s vrijednostima  $Tx = \{Z, S, M, B\}$  i neka je dana druga jezična varijabla  $Y$  na univerzalnom skupu  $V$  s vrijednostima  $Ty = \{Z, S, M, B\}$ . Neka su dane interpretacije jezičnih vrijednosti funkcijama pripadnosti.

Pretpostavimo da postoji dana funkcionalna zavisnost  $f$  između diskretnih vrijednosti  $x$  i diskretnih vrijednosti  $y$ . Ta zavisnost nije kauzalne prirode, ona je dvosmjerna:<sup>24</sup>

$$\begin{aligned} \text{Ako } x \text{ je } x \text{ tada je } y &= f(x) \\ \text{Ako je } y \text{ tada je } x &= f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Analitičku funkciju možemo aproksimirati:

$$\begin{aligned} \text{Ako } x \text{ je } Z \text{ tada } y \text{ je } Z \\ \text{Ako } x \text{ je } S \text{ tada } y \text{ je } S \\ \text{Ako } x \text{ je } M \text{ tada } y \text{ je } M \\ \text{Ako } x \text{ je } B \text{ tada } y \text{ je } B \end{aligned}$$

Ova pravila eksplicitno daju kako se računaju vrijednosti  $y$  za dane vrijednosti  $x$ . Ako su dane vrijednosti  $y$ , ne mogu se odrediti vrijednosti  $x$ . Uzročnost je samo u smjeru  $x$  prema  $y$ .

## 7.6 Predstavljanje značenja ako-onda pravila

Veliki broj relacija može se koristiti za predstavljanje značenja ako-onda pravila. Većina je izvedena iz viševrijednosne logike. Implikacija  $p \Rightarrow q$  je u binarnoj logici dana s  $\neg p \vee q$  ili  $(p \wedge q) \vee \neg p$ . Za proširenje na neizrazitu logiku koriste se ograničena suma (za prvi slučaj) ili  $\max$  i  $\min$  (za drugi slučaj), tj. vrijednost implikacije  $p \Rightarrow q$  interpretira se kao  $\min(1, 1 - p + q)$  ili  $\max(\min(p, q), 1 - q)$  respektivno.

**Primjer 15** Ako (X je A) onda (Y je B). Značenja (X je A) i (Y je B) dana su sa

$$\begin{aligned} \mu_A &= 0.1/x_1 + 0.4/x_2 + 0.7/x_3 + 1/x_4 \\ \mu_B &= 0.2/y_1 + 0.5/y_2 + 0.9/y_3 \end{aligned}$$

“Ako A onda B” interpretira se kao “ne A ili B” gdje je *ili* operacija  $\max$ , a *ne x* operacija  $1 - x$ . Dakle,

$$\mu_{\neg A \vee B} = \max(\mu_{c(A^c)}(x, y), \mu_{c(B)}(x, y)) = \max(1 - \mu_{c(A)}(x, y), \mu_{c(B)}(x, y))$$

<sup>23</sup> variable assignment

<sup>24</sup> bidirectional

$$\underbrace{\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}}_{c(A^c)} \cup \underbrace{\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \end{matrix}}_{c(B)} = \underbrace{\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \end{matrix}}_{c(A^c) \cup c(B)}$$

$$\underbrace{\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \begin{pmatrix} 0.1 & 0.4 & 0.7 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \end{matrix}}_R = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix}}_B$$

Treba uočiti da kompozicija  $A$  i  $R$  ne daje  $B$ . To je pojava kod svih definicija implikacije i zove se **intereakcija**.

Neke implikacije:

- **Kleene-Diensa implikacija:**

$$R_b = c(A^c) \cup c(B)$$

$$\mu_R(x, y) = \max(1 - \mu_A(x), \mu_B(y))$$

- **Lukasiewiczeva implikacija** (iz binarne logike:  $\neg p \vee q$ ):

$$R_a = c(A^c) \oplus c(B)$$

$$\mu_R(x, y) = \min(1, 1 - \mu_A(x) + \mu_B(y))$$

Vrijedi  $R_b \subseteq R_a$ , tj.  $\mu_{R_b}(x, y) \leq \mu_{R_a}(x, y)$ , tj.  $R_b$  je *jača* implikacija. Vidi [primjer 16](#).

- **Zadehova implikacija** (iz binarne logike:  $(p \wedge q) \vee \neg p$ ).

$$R = (c(A) \cap c(B)) \cup c(A^c)$$

$$\mu_R(x, y) = \max(\min(\mu_A(x), \mu_B(y)), 1 - \mu_A(x))$$

- **Gödelova implikacija** je najpoznatija u viševrijednosnoj logici. Vrijednosti istinitosti  $p \Rightarrow q$  definirane su sa:

$$v(p, q) = \begin{cases} 1 & \text{za } p \leq q \\ q & \text{inače} \end{cases}$$

(vidi [primjer 17](#)).

- **Mamdani implikacija** ( $p \Rightarrow q \equiv p \wedge q$ ) je najvažnija implikacija u neizravnom upravljanju:

$$R_m = (c(A) \cap c(B))$$

$$\mu_R(x, y) = \min(\mu_A(x), \mu_B(y))$$

(vidi [primjer 18](#)).

**Primjer 16** Lukasiewiczeva implikacija:

$$\underbrace{\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 0.9 & 0.9 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}}_{c(A^c)} \cup \underbrace{\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \end{matrix}}_{c(B)} = \underbrace{\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 0.8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 & 1 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}}_{c(A^c) \cup c(B)}$$

**Primjer 17** Gödelova implikacija:

$$\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 0.2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

**Primjer 18** Mamdanijeva implikacija:

$$\underbrace{\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.7 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}}_{c(A)} \cup \underbrace{\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \end{matrix}}_{c(B)} = \underbrace{\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \\ x_2 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{pmatrix} \\ x_3 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.7 \end{pmatrix} \\ x_4 & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.9 \end{pmatrix} \end{matrix}}_{c(A) \cup c(B)}$$